1 階常微分方程式の数値解法の復習

演習課題 3 (6 月 18 日分)

惑星のケプラー運動を考える。中心星の位置を原点にとって, 惑星の位置を直交座標で $(x(t), y(t))$ とあらわすと, 運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GMx}{r^3}, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{GMy}{r^3}, \quad \text{ただし } r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{1}$$

となる。ここで M は中心星の質量, G は万有引力定数である。長さを時刻ゼロでの中心星と惑星とのあいだの距離 a, 速度を $\sqrt{GM/a}$, 時間を $\sqrt{a^3/(GM)}$ でそれぞれ規格化する (変数の無次元化)。さらに速度を

$$u \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

で定義すると, 運動方程式 (1) は, 時間に関する無次元の 1 階連立常微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{y}{r^3}, \quad \text{ただし } r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{3}$$

に帰着する。時刻ゼロで惑星は x 軸上に存在し, さらに y 軸方向に速度 v_0 で動くとすれば, 初期条件は

$$x = 1, \quad y = 0, \quad u = 0, \quad v = v_0 \tag{4}$$

である。なお惑星の描く軌道は, 極座標 (r, θ) をもちいれば, 厳密に

$$r = \frac{v_0^2}{1-(1-v_0^2)\cos\theta} \tag{5}$$

とあらわすことができ, $|v_0| = 1$ で円軌道, $|v_0| = \sqrt{2}$ で放物線軌道, $|v_0| > \sqrt{2}$ で双曲線軌道になる ($\theta = \arctan(y/x)$ は方位角)。また楕円軌道の場合, 公転周期は無次元時間で $2\pi\ell^{3/2}$ に等しい (ただし ℓ は軌道の長半径で $\ell = 1/(2-v_0^2)$)。

今回は, 以下の条件を満たすような動画 GIF ファイルを **6 月 20 日**までに電子メールで送ってください。

- 初期条件 $v_0 = 0.8$, 1, 1.2, 1.5 の 4 通りに対して, 4 次のルンゲ・クッタ法をもちいて, 適当と思われる時刻まで時間積分する。そして惑星の位置を xy 平面上に○印等でプロットし, それぞれの初期条件のもと, どのように惑星が運動するかを, アニメーション表示したものであること。
- 4 通りの初期条件で計算した結果を, まとめて表示すること。すなわち, 時刻ゼロでは 4 つの○印等は重なっており, その後各惑星がそれぞれの初期条件にしたがって運動するのがわかるような動画にすること (惑星どうしの引力を考えるとかそういうことではなくて, 単に 4 つの計算結果をまとめて表示せよ, ということ)。
- 動画 GIF ファイルの容量は 500 キロバイトを超えないこと。
- 厳密解の軌道は表示しなくてもいいが, あわせて表示すると評価は高い。

ヒントと補足

- 式 (3) をベクトルの形式で書くと

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ -x(x^2+y^2)^{-3/2} \\ -y(x^2+y^2)^{-3/2} \end{pmatrix}$$

となる。今回はこれを 4 成分のベクトル変数に対する常微分方程式とみて, ルンゲ・クッタ法のアルゴリズムを適用すればよい。

- 長さ 4 の配列 `w(1:4)` を用意して, たとえば

$$x(t) \Leftrightarrow \texttt{w(1)}, \quad y(t) \Leftrightarrow \texttt{w(2)}, \quad u(t) \Leftrightarrow \texttt{w(3)}, \quad v(t) \Leftrightarrow \texttt{w(4)}$$

  のような対応関係を仮定すれば, 前回つくったプログラムをほとんど変えずにすむはずである。

- 時間積分のステップ幅 Δ_t の値としては 10^{-2} 程度であれば「そこそこ」精度よく計算できるはずである。

- 惑星の全エネルギー (E) および角運動量 (A) は, 適当に無次元化すると, それぞれ

$$E = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \frac{1}{r}, \quad A = xv - yu,$$

  と書ける。これらが本当に保存しているかどうか, 横軸に時間, 縦軸に E や A の相対誤差 (すなわち初期値をそれぞれ E_0, A_0 としたとき, $|1 - E/E_0|$ や $|1 - A/A_0|$) をとったグラフを描いて確かめてみるとよい。

- 今回の問題を拡張して, 多数の惑星が相互に重力を及ぼし合って運動するような系 (多体系) に拡張することはそれほど難しくはない。たとえば太陽系の惑星の軌道の安定性の問題や, 原始太陽系の惑星形成過程などにおいて, 発展的な数値シミュレーションがおこなわれている。また質点どうしにはたらくポテンシャルを変えれば, 分子動力学にも応用できる。