

水の波の数値シミュレーション

線形長波の数値計算法: (1) 有限体積法

以下に、線形長波近似による水の波の式の導出をかねつつ、その数値計算法を有限体積法 (finite volume method) の考えにもとづいて説明する。まず xy 平面内の矩形領域 $0 \leq x \leq a_x, 0 \leq y \leq a_y$ に水がたたえられていて、水深を $D(x, y)$ とおく。静水面から計った波の高さ $w(x, y, t)$ は、水深にくらべてじゅうぶん低い。また波長は水深にくらべてじゅうぶん長い (線形長波)。すると水の流れは水平成分が卓越し、鉛直流はほとんど無視できる。また流速は深さ方向にほとんど一様であるとしてよい。そこで x 方向の水平流速を $u(x, y, t)$, y 方向の水平流速を $v(x, y, t)$ とおく。

xy 座標を

$$x_i = ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N_x), \quad y_j = jh \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N_y), \quad (1)$$

のように離散化して、この水域を一辺の長さ h の正方形セルで埋め尽す (図 1a)。ただし $a_x \equiv N_x h, a_y \equiv N_y h$ を仮定する)。ある正方形セル ($x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1}$) に着目し、その上にそそり立つ水の柱の質量保存を考えよう (図 1b)。この水柱の体積は、底面積 h^2 にセルの中心の水位を乗じたものでよく近似できる。そこで

$$w_{ij}(t) \equiv w(x_i + \frac{1}{2}h, y_j + \frac{1}{2}h, t) \quad (0 \leq i \leq N_x - 1, 0 \leq j \leq N_y - 1) \quad (2)$$

と定義すれば、水深は時間変化しないから、水柱の質量保存の式は

$$\frac{d}{dt}(\rho h^2 w_{ij}) = (\text{単位時間に水柱の側面から流入する水の質量}) \quad (3)$$

となる (ρ は水の密度)。したがって、水平流速は水柱の側面 (正方形セルの各辺の中心) で定義するのが適切である。すなわち、離散変数を

$$\begin{cases} u_{ij}(t) \equiv u(x_i, y_j + \frac{1}{2}h, t) & (0 \leq i \leq N_x, 0 \leq j \leq N_y - 1), \\ v_{ij}(t) \equiv v(x_i + \frac{1}{2}h, y_j, t) & (0 \leq i \leq N_x - 1, 0 \leq j \leq N_y), \end{cases} \quad (4)$$

と定義すれば、式 (3) は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho h^2 w_{ij}) = \rho h \left[D(x_i, y_j + \frac{1}{2}h)u_{ij} - D(x_{i+1}, y_j + \frac{1}{2}h)u_{i+1j} \right. \\ \left. + D(x_i + \frac{1}{2}h, y_j)v_{ij} - D(x_i + \frac{1}{2}h, y_{j+1})v_{ij+1} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

と書くことができる¹。

つぎに x 方向の運動方程式を考えよう。今度は流速 u_{ij} を定義した点を中心とする正方形セル ($x_i - \frac{1}{2}h \leq x \leq x_i + \frac{1}{2}h, y_j \leq y \leq y_{j+1}$) の上にそそり立つ水柱のもつ運動量の時間変化を考える (図 1c)。流速がじゅうぶん遅いとして運動量の移流を無視する。また水底などにおける摩擦も無視する。するとこの水柱に水平方向に作用する主要な力は、側面にはたらく圧力 p に起因するものだけである。ある深さに高さ δ の領域をとる。この領域がもつ運動量は $\rho \delta h^2 u_{ij}$ である。 $x = x_i + \frac{1}{2}h$ のほうの側面 (断面積 δh) にかかる水圧は、波のない状態の圧力 (静水圧) を基準にとると、 $p_{ij} = \rho g w_{ij}$ である。もう一方の側面にかかる圧力との差が正味の力あるから、運動方程式は

$$\frac{d}{dt}(\rho \delta h^2 u_{ij}) = \delta h(p_{i-1j} - p_{ij}) = \rho g \delta h(w_{i-1j} - w_{ij}) \quad (6)$$

と近似できる。同様に y 方向の運動方程式も導かれる。これらをあわせると、結局

$$\begin{cases} \frac{dw_{ij}}{dt} = \frac{g}{h}(w_{i-1j} - w_{ij}) & (1 \leq i \leq N_x - 1, 0 \leq j \leq N_y - 1), \\ \frac{dw_{ij}}{dt} = \frac{g}{h}(w_{ij-1} - w_{ij}) & (0 \leq i \leq N_x - 1, 1 \leq j \leq N_y - 1), \\ \frac{dw_{ij}}{dt} = \frac{1}{h} \left[D(x_i, y_j + \frac{1}{2}h)u_{ij} - D(x_{i+1}, y_j + \frac{1}{2}h)u_{i+1j} \right. \\ \left. + D(x_i + \frac{1}{2}h, y_j)v_{ij} - D(x_i + \frac{1}{2}h, y_{j+1})v_{ij+1} \right] & (0 \leq i \leq N_x - 1, 0 \leq j \leq N_y - 1), \end{cases} \quad (7)$$

¹正確には水柱の高さは $D + w$ であるが、 $D \gg |w|$ を仮定して、非線形項は無視する。

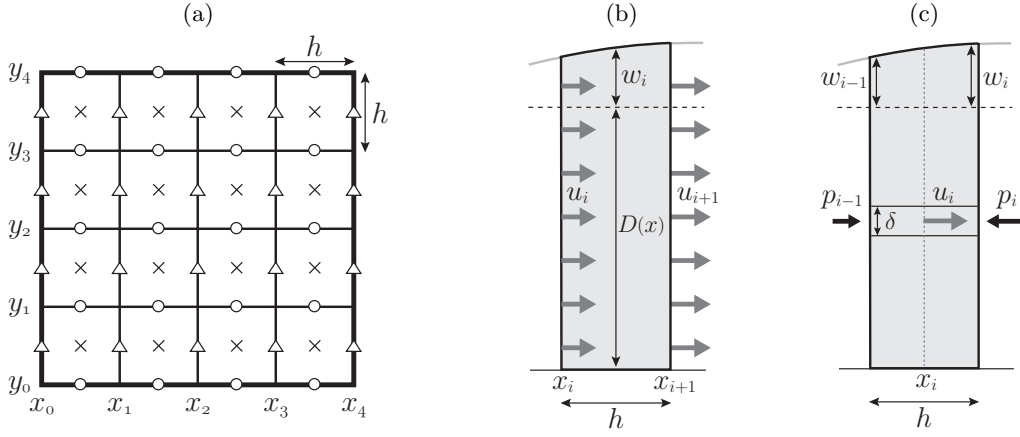


図 1: (a) 考える水域を一边 h の正方形セルに分割する ($N_x = N_y = 4$ の場合)。セル中央 (\times) で波の高さ w_{ij} を定義し、セルの辺の中点 (\triangle と \circ) で水平流速 u_{ij} と v_{ij} とを定義すれば、保存則を満足させるのに都合がよい (食い違い格子)。(b) 水柱の質量保存。灰色の矢印は水平流速をあらわす。点線は静水面。(c) 水柱の運動量保存。黒い矢印は水圧による力をあらわす。

のような連立常微分方程式が得られる。水域の境界が岸壁のようなもので囲われているとすれば、流速の壁に垂直な成分はないので、境界条件として

$$\begin{cases} u_{0j} = u_{N_x j} = 0 & (0 \leq j \leq N_y - 1), \\ v_{i0} = v_{iN_y} = 0 & (0 \leq i \leq N_x - 1), \end{cases} \quad (8)$$

を課せばよい (ディリクレ型の条件)。なお w_{ij} に関する境界条件は陽に必要としない。

有限体積法では、各セルごとに質量保存則や運動量保存則が満足されるので、全体としても質量や運動量が保存する。実際、方程式 (7) と境界条件 (8) のもとでは全質量

$$\rho h^2 \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \left[D(x_i + \frac{1}{2}h, y_j + \frac{1}{2}h) + w_{ij} \right] \quad (9)$$

と全エネルギー

$$\frac{1}{2} \rho h^2 \left[\sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} D(x_i, y_j + \frac{1}{2}h) u_{ij}^2 + \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} D(x_i + \frac{1}{2}h, y_j) v_{ij}^2 + \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} g w_{ij}^2 \right] \quad (10)$$

が完全に保存する。離散変数 w_{ij} および u_{ij}, v_{ij} の定義式はそれぞれ (2) および (4) のようであり、すべて異なる点で定義されている。これはいわゆる食い違い格子 (staggered grid) をもちいた変数の配置法の例である (図 1a)。式 (7) は、 $h \rightarrow 0$ の極限をとれば、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(Du) - \frac{\partial}{\partial y}(Dv), \quad (11)$$

という偏微分方程式に帰着し、さらに変数 u, v を消去すると、波動方程式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha^2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (12)$$

が導かれる。ここで $\alpha(x, y) \equiv \sqrt{gD(x, y)}$ は波の伝搬速度である。

線形長波の数値計算法: (2) 有限差分法

つぎに波動方程式 (12) が与えられたとして、これを有限差分法の考え方で離散化してみよう。まず波の高さをあらわす離散変数を

$$w_{ij}(t) \equiv w(x_i, y_j, t) \quad (0 \leq i \leq N_x, \quad 0 \leq j \leq N_y) \quad (13)$$

とスナオに定義し, 方程式の右边を中心差分で近似する。一般に $\alpha = \sqrt{gD}$ は空間に依存するから, まず $x = x_i \pm \frac{1}{2}h$ で $f = gD \partial w / \partial x$ を差分近似し, さらに $\partial f / \partial x$ を $x = x_i$ で差分近似する。 y 微分も同様。波動方程式は時間に関する 2 階の微分方程式であるが, 波の高さの変化速度 $z_{ij}(t) = dw_{ij}/dt$ を新たに変数にとることで,

$$\begin{cases} \frac{dw_{ij}}{dt} = z_{ij}, \\ \frac{dz_{ij}}{dt} = \frac{g}{h^2} \left[D(x_i + \frac{1}{2}h, y_j)(w_{i+1j} - w_{ij}) - D(x_i - \frac{1}{2}h, y_j)(w_{ij} - w_{i-1j}) \right. \\ \quad \left. + D(x_i, y_j + \frac{1}{2}h)(w_{ij+1} - w_{ij}) - D(x_i, y_j - \frac{1}{2}h)(w_{ij} - w_{ij-1}) \right], \end{cases} \quad (14)$$

のような 1 階の連立常微分方程式が得られる。前節と同様, 境界では水の流入・流出がないと仮定すると, 境界条件は

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a_x} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=a_y} = 0 \quad (15)$$

とあらわされる (ノイマン型の条件)。たとえば $x = 0$ では

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(gD \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]_{x=0} = gD \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0} \simeq gD(x_0, y_j) \frac{2w_{1j} - 2w_{0j}}{h^2} \quad (16)$$

のような 1 次の片側差分をもちいることができる。なお z_{ij} に関する境界条件は必要ない。

数値分散

波動方程式を差分近似すると, 本来波の伝搬速度は波長によらずに一定であるにもかかわらず, 数値的には波長の短い波ほど伝搬速度が遅くなってしまふという現象が起こる。これを数値分散 (numerical dispersion) という²。議論を簡単にするために, 位相速度一定の 1 次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (17)$$

を考える。有限差分法をもちいて $w_i(t) \equiv w(x_i, t)$ のように離散化して, 式 (17) の右边を 2 次中心差分で置き換えると, 解くべき式は

$$\frac{d^2 w_i}{dt^2} = \alpha^2 \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} \quad (18)$$

となる。ある時刻 t に波数 k の波

$$w(x, t) = \sin kx \quad (19)$$

があったとする。方程式 (17) の右边は, 本来

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\alpha^2 k^2 \sin kx \quad (20)$$

になるはずである。ところが数値的には, 式 (18) より,

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} &= \alpha^2 \frac{\sin k(x_i + h) - 2 \sin kx_i + \sin k(x_i - h)}{h^2} \\ &= -2\alpha^2 \frac{\sin kx_i (1 - \cos kh)}{h^2} \end{aligned} \quad (21)$$

となる。これと厳密な値 (20) とを見比べると, みかけ上, 数値解の位相速度 α_{num} が

$$\alpha_{\text{num}} = \alpha \sqrt{\frac{2(1 - \cos kh)}{k^2 h^2}} = \alpha \sqrt{1 - \frac{1}{12}(kh)^2 + \dots} \simeq \alpha \left[1 - \frac{1}{24}(kh)^2 \right] \quad (22)$$

となっていることがわかる。すなわち k が大きいほど (波長が短いほど) 位相速度が遅くなるのである。数値分散を防ぐには, $|kh| \ll 1$ が成り立つように, 格子の幅 h をじゅうぶん小さくすることが本質的である。

²分散波とは波長によって位相速度が異なる波をいう。現実の水の波は分散性をもつが, 線形長波の極限では分散ゼロになる。

クーラン条件

簡単のため水深を一定とすると、連立常微分方程式 (7) から u_{ij}, v_{ij} を消去した式は

$$\frac{d^2 w_{ij}}{dt^2} = \frac{\alpha^2}{h^2} (w_{i-1j} + w_{i+1j} + w_{ij-1} + w_{ij+1} - 4w_{ij}) \quad (23)$$

のようになる ($\alpha = \sqrt{gD}$)。離散変数 w_{ij} を順に並べた長さ $N_x N_y$ のベクトル w を定義して、これを

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = Aw \quad (24)$$

のように行列・ベクトル表示する。係数行列 A は対称行列で対角化可能であり、その固有値はすべて負の実数 $-\lambda_k^2$ になる ($k = 1, 2, \dots, N_x N_y$)。複素変数を導入すれば、式 (23) は、各固有値に対応する $2N_x N_y$ 個の 1 階線形微分方程式

$$\frac{d\hat{w}_k}{dt} = \pm i\lambda_k \hat{w}_k \quad (25)$$

を解くことと等価になる。したがって、式 (23) を時間ステップの刻み幅 Δ_t で時間積分するときには、すべての複素数 $\pm i\lambda_k \Delta_t$ が、もちいる積分スキームの安定領域内にはいる必要がある。ルンゲ・クッタ法などの陽解法をもちいた場合、その条件は一般に

$$\Delta_t < \frac{ch}{\alpha} \quad (c \text{ は定数}) \quad (26)$$

とあらわされ、これをクーラン条件あるいは CFL 条件 (Courant-Friedrichs-Lewy condition) という。定数 c は空間の次元の数やもちいる数値計算手法に依存する。基本的には、グリッド幅 h を情報が伝わるのに要する時間よりも Δ_t を短くしなければならない、というのがクーラン条件の意味するところである。

コンパクト差分法

誤差 (とくに数値分散) を小さくするには、精度の良い差分公式をつかうのも有効である。ここでは 4 次精度のコンパクト差分公式を紹介する。関数 $f(x)$ が $0 \leq x \leq a_x$ で定義されていて、 $x_i = ih$ ($h = a_x/N$, $0 \leq i \leq N$), $f_i = f(x_i)$ と離散化されているとする。このとき $x = x_i$ での f の 1 階微分係数 f'_i を、

$$\alpha f'_i + \beta (f'_{i-1} + f'_{i+1}) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad (27)$$

のように表現すると、 $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{6}$ のとき、両辺の誤差が打ち消し合って、 $O(h^4)$ の精度になる (テーラー展開して確かめてみよ)。2 階微分係数 f''_i の場合は

$$\frac{5}{6} f''_i + \frac{1}{12} (f''_{i-1} + f''_{i+1}) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \quad (28)$$

のような重みづけにすると 4 次公式になる。たとえば両境界で f の 1 階微分係数がゼロになるという境界条件がすでに課せられていると仮定すると、 f の 2 階微分係数は連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} & \frac{1}{12} \\ & & & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f''_0 \\ f''_1 \\ \vdots \\ f''_{N-1} \\ f''_N \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2f_1 - 2f_0 \\ f_2 - 2f_1 + f_0 \\ \vdots \\ f_N - 2f_{N-1} + f_{N-2} \\ -2f_N + 2f_{N-1} \end{pmatrix} \quad (29)$$

の解として求まる (境界での重みが上のようなことはテーラー展開から導くことができる)。式 (29) の右辺は通常の 2 次中心差分公式で求めた 2 階微分係数の近似値である。コンパクト差分とは、それらをさらに適当な重みづけで平均化して精度をあげたもの、とみなすことができる。係数の導出はやや煩雑であるが、食い違い格子上でも同様にコンパクト差分をもちいることができる。

非線形分散波

線形長波近似は、波長が水深に比べて十分長く、かつ波高が水深に比べてじゅうぶん低い場合においてのみ成り立つ。もうすこしましな近似として、たとえば以下のペレグリンの式³が知られている:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (Du) + \frac{\partial}{\partial y} (Dv) \right] - \frac{D^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (30)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} (Du) + \frac{\partial}{\partial y} (Dv) \right] - \frac{D^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial t \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (31)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [(D+w)u] - \frac{\partial}{\partial y} [(D+w)v]. \quad (32)$$

式 (30)(31) は運動方程式で、左辺に移流項 (非線形項)、右辺に分散項が付け加わっている。式 (32) は質量の保存をあらわす。これらを数値的に解くには、形式的には、まず式 (32) と

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - g \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - g \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (34)$$

とを時間積分して w, F, G の値を得る。そして任意の時間ステップでの流速は、

$$u - \frac{D}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (Du) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (Dv) \right] + \frac{D^2}{6} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = F, \quad (35)$$

$$v - \frac{D}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (Dv) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (Du) \right] + \frac{D^2}{6} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = G, \quad (36)$$

を境界値問題として解くことによって求める。

最終課題

以下の問題 A, B, C を解き、できれば LaTeX などのソフトで清書して、レポートにまとめる。最低限解答が求められるのは問題 A で、その他はオプションとする。9 月上旬に口頭試問をおこなうので、そのときに紙に印刷して (手書きでもよいが...) 持参する。口頭試問の場所は理学部 1 号館 710 教室とし (控え室も兼ねる)、日程は以下の表のとおりとする (数字は学籍番号の下 2 桁)。不都合がある場合は早めに桜庭まで電子メールで連絡すること。

	13:00 ~ 14:00	14:00 ~ 15:00	15:00 ~ 16:00	16:00 ~ 17:00
9 月 3 日 (月)	01-05	06-09	10-14	予備
9 月 5 日 (水)	15-19	20-24	予備	—

問題 A (6 月 25 日・27 日分の演習課題を兼ねる)

1 次元の区間 $0 \leq x \leq 1$ に深さ一定の水域を考え、水の波のシミュレーションをおこなう。まず波の高さ $w(x, t)$ および水平流速 $u(x, t)$ を

$$\begin{cases} w_i(t) = w(x_i + \frac{1}{2}h, t) & (0 \leq i \leq N_x - 1), \\ u_i(t) = u(x_i, t) & (0 \leq i \leq N_x), \end{cases} \quad (A1)$$

ただし

$$x_i = ih, \quad h = \frac{1}{N_x} \quad (i = 0, 1, \dots, N_x), \quad (A2)$$

³D. H. Peregrine (1967), J. Fluid Mech. 27, part 4, 815-827. ただこれも近似式であって、本当は水の 3 次元的な流動を解かなければならない。

のように離散化し (食い違い格子), 有限体積法の考えにしたがって, 連立常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = \frac{1}{h}(w_{i-1} - w_i) & (1 \leq i \leq N_x - 1), \\ \frac{dw_i}{dt} = \frac{1}{h}(u_i - u_{i+1}) & (0 \leq i \leq N_x - 1), \end{cases} \quad (\text{A3})$$

を, 境界条件

$$u_0 = u_{N_x} = 0 \quad (\text{A4})$$

のもとで時間積分する。時刻ゼロでは水は静止していて, 初期波形として

$$w(x, 0) = \exp[-(x/b)^2] \quad (\text{A5})$$

を与える⁴ (b は波形を決める定数)。

- (a) b の値を適当に設定した上で, 4 次ルンゲ・クッタ法をもちいて時間積分を実行し, 波が伝搬し, 壁で反射するようすをわかりやすく図示せよ。
- (b) クーラン条件がどうなるか理論的に予想し, それを数値シミュレーションで確かめよ。
- (c) 時刻 $\tau_k = 2k$ ($k = 1, 2, \dots$) では, 波の形は完全に初期状態に戻る。そこで k 回反射後の波形誤差を

$$\varepsilon_k = \sqrt{\frac{1}{N_x} \sum_{i=0}^{N_x-1} [w_i(\tau_k) - w_i(0)]^2} \quad (\text{A6})$$

で定義し, 反射回数 k や格子間隔 h とともに ε_k がどう変化するか調べよ。数値分散が波形の誤差にどのように影響しているか論ぜよ。

- (d) つぎに波の高さを

$$w_i(t) = w(x_i, t) \quad (0 \leq i \leq N_x) \quad (\text{A7})$$

のように離散化し, 補助変数 $z_i(t) = dw_i/dt$ を定義した上で, 有限差分法の考えにしたがって波動方程式を時間積分してみよ (式 (14) を参照)。さらにコンパクト差分法をもちいることで, 前問の誤差 ε_k がどの程度抑えられるか論ぜよ。

- (e) 水深を適当に設定し, 1 次元非線形分散波の数値シミュレーションをおこなえ。

問題 B

複素変数 $u(t)$ に関する線形常微分方程式

$$\frac{du}{dt} = \lambda u \quad (\lambda \text{ は定数}) \quad (\text{B1})$$

を s 次のルンゲ・クッタ法で解いたときの, 数値解の安定性および厳密解からの誤差を, λ が負の実数および純虚数のそれぞれの場合について論ぜよ (ただし $1 \leq s \leq 4$)。とくに λ が虚数の場合には, 誤差を振幅と位相にわけて論ぜよ。

問題 C

時間に関する連立常微分方程式を解くことに帰着するような問題を適当に設定し, 数値解を求め, 論ぜよ。

⁴ここでは水域の長さ a_x , およびその距離を波が伝わる時間 a_x/α をもちいて空間座標と時間をそれぞれ規格化して, 無次元化された式を解いている。線形長波近似が成り立つためには, 波の高さが波長に比べてじゅうぶん小さくなければならない。ここでは「みやすさ」を重視して波の高さを $O(1)$ にしている。