演習課題 1 の解答例

(b) 微分方程式 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = -u$ をオイラー法で解くと,

$$u_n = (1-\Delta_t)u_{n-1} = \cdots = (1-\Delta_t)^n u_0$$

であるから, 発散しないためには $\Delta_t < 2$ である必要がある。実際 $0 < \Delta_t < 1$ では解は単調に減衰し, $1 < \Delta_t < 2$ では振動しながらも減衰し, $\Delta_t > 2$ では振動しながら発散することを確かめた。

(d) この方程式の固有値は i で, 純虚数である。オイラー法の安定領域には虚軸は含まれないため, 数値解の振幅はつねに増大し, 時間無限大の極限では発散する。実際, Δ_t を小さくとると解の振幅の増大率は 1 に近くなるものの, 振幅が単調に増大する傾向がみられた (図 1a)。

(e) 後退オイラー法の安定領域には虚軸が含まれる。よって解の振幅は発散しない。虚軸上では振幅の増大率は 1 よりも小さいので, 後退オイラー法では, 数値解の振幅はむしろ減少することが予想される。実際計算をおこなったところ, オイラー法とは逆に, 解の振幅が減少する傾向がみられた (図 1b)。

(f) クランク・ニコルソン法も安定領域に虚軸が含まれる。この場合, 虚軸上では振幅の増大率が 1 であるので, 数値解の振幅は一定に保たれることが予想される。実際計算をおこなったところ, 比較的 Δ_t を大きくしても, 振幅は一定に保たれ (図 1c), 厳密解に近い解が得られた。

一般に角振動数 ω の振動方程式 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = i\omega u$ を解くと, オイラー法では,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + i\omega\Delta_t = \underbrace{\left[1+\tfrac{1}{2}(\omega\Delta_t)^2+\cdots\right]}_{\text{振幅}}\cdot\exp\left[i\,\underbrace{\omega\Delta_t\left(1-\tfrac{1}{3}(\omega\Delta_t)^2+\cdots\right)}_{\text{位相}}\right] \tag{1}$$

で, 解の振幅は必ず増大し, かつ位相は徐々に遅れる (厳密解は $u_{n+1}/u_n = \exp(i\omega\Delta_t)$ である)。いっぽう後退オイラー法では

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1-i\omega\Delta_t} = \underbrace{\left[1-\tfrac{1}{2}(\omega\Delta_t)^2+\cdots\right]}_{\text{振幅}}\cdot\exp\left[i\,\underbrace{\omega\Delta_t\left(1-\tfrac{1}{3}(\omega\Delta_t)^2+\cdots\right)}_{\text{位相}}\right] \tag{2}$$

で, 振幅は徐々に小さくなる。位相はオイラー法と同様に遅れる。クランク・ニコルソン法の場合,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\frac{1}{2}i\omega\Delta_t}{1-\frac{1}{2}i\omega\Delta_t} = 1\cdot\exp\left[i\,\underbrace{\omega\Delta_t\left(1-\tfrac{1}{12}(\omega\Delta_t)^2+\cdots\right)}_{\text{位相}}\right] \tag{3}$$

で, 振幅は真の解と同様にふるまう。位相はやはり遅れる (ただし遅れ具合はじゃっかん改善される)。

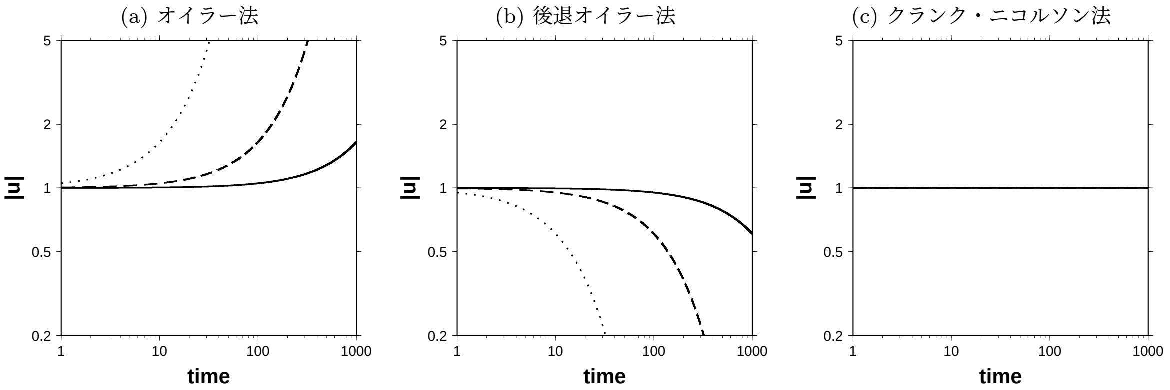

図 1: 振動方程式 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = iu$ を, (a) オイラー法, (b) 後退オイラー法および (c) クランク・ニコルソン法で解いたときの数値解の振幅 $|u|$ を, 時間の関数としてあらわしたもの。実線は $\Delta_t = 10^{-3}$, 破線は $\Delta_t = 10^{-2}$, 点線は $\Delta_t = 0.1$ の場合の結果である。オイラー法では解はいずれ発散し, 後退オイラー法ではいずれ減衰することがわかる。クランク・ニコルソン法で解いた 3 つの解は, ほとんど重なって 1 本の線になって, 判別できない。