演習課題 4 の解答例

問題 A

(a) 「等温壁」の場合, 解くべき連立常微分方程式は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

のようである。たとえば $h = 1/N = 1/20$ のとき, 行列 A の固有値のうち絶対値最大のものは, $\lambda_{\max} = -1590.14\cdots \simeq -3.9754/h^2$ である。したがってオイラー法の場合, 時間ステップの刻み幅に対する条件は

$$\Delta_t < \frac{2}{|\lambda_{\max}|} \simeq 1.258 \times 10^{-3} \tag{2}$$

となる。なお N がじゅうぶん大きければ, $\lambda_{\max} \simeq -4/h^2$ であり, 安定条件は $\Delta_t < h^2/2$ となる。図 1(a) は $N = 20$, $\Delta_t = 10^{-4}$ として, 時刻 $t = 0$ から 0.3 まで計算し, 時間 0.05 刻みで温度分布をプロットしたものである。徐々に定常解 $T(x) = x$ に近づいているようすがわかる。図 1(b) は $x = 0.5$ における温度を時間の関数としてあらわしたものである。時間積分のステップ幅 Δ_t が安定条件から外れるやいなや, 温度が増大してしまうことがわかる。

(b) 「断熱壁」の問題について, 同様に $h = 1/N = 1/20$, $\Delta_t = 10^{-4}$ で積分した結果を図 2(a) にしめす。こんどは右端の温度も減少していることがわかる。N をじゅうぶん大きくとり, かつ Δ_t をじゅうぶん小さくとって計算した結果,

$$\tau_1 = 0.3787\cdots, \quad \tau_2 = 0.1129\cdots, \tag{3}$$

となった (図 2(b) を参照)。なお「断熱壁」の場合, 解くべき連立常微分方程式の係数行列は

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

であり, たとえば $h = 1/20$ のとき, 絶対値最大の固有値は, $\lambda_{\max} = -1597.53\cdots \simeq -3.9938/h^2$ で, 「等温壁」よりもちょっとだけ絶対値が大きい。

(c) 前問と同じ問題を, $\Delta_t = 10^{-2}$ で, クランク・ニコルソン法で計算した結果を図 3 にしめす。図 2 (b) の場合にくらべて Δ_t が 100 倍大きいが, それなりに精度よく計算できていることがわかる。クランク・ニコルソン法はオイラー法にくらべて, 時間ステップを 1 段すすめるのに 2 倍程度の計算量が必要であるが, 時間積分の精度がよく, かついかなる Δ_t に対してもつねに安定で, 時間ステップ幅を大きくとることができるので, 結果として計算時間が少なくてすむというメリットがある。

問題 B

座標空間を等間隔 h の格子に区切って, オイラー法で計算した結果を図 4 にしめす ($h = 1/50$, $\Delta_t = 2 \times 10^{-5}$ とした)。このとき, 点 (0.5, 1) での温度は $0.3641\cdots$, 点 (0, 1) での温度勾配 (x 成分しかない) の大きさは, 1 次の片側差分で求めると $0.8346\cdots$ となった。なおこの問題に関する連立常微分方程式の係数行列の固有値のうち絶対値最大のものは, $h = 1/50$ のとき, $\lambda_{\max} = -19995.1\cdots = -7.998/h^2$ である。N がじゅうぶん大きいときには $\lambda_{\max} \simeq -8/h^2$ になる。したがってオイラー法で解くときには $\Delta_t < h^2/4$ なる条件が課せられる。

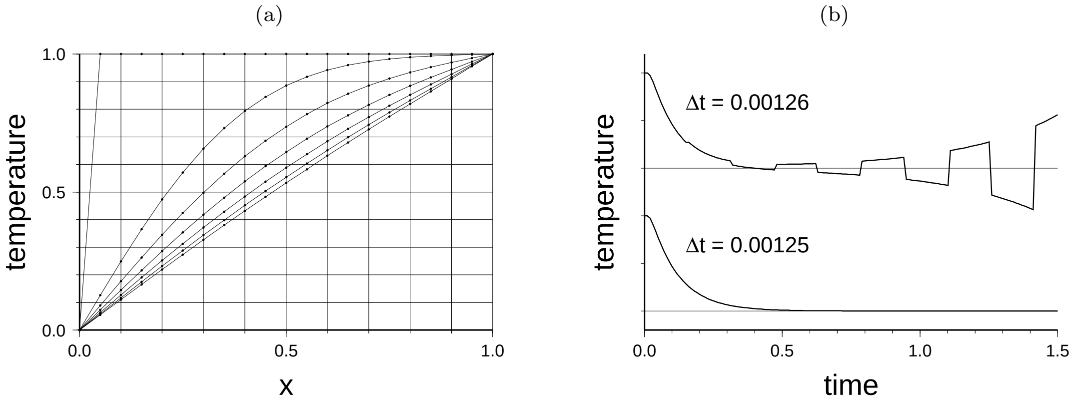

図 1: 「等温壁」の結果 (ただし $h = 1/N = 1/20$)。(a) 時刻 $t = 0$ から 0.3 まで, 時間間隔 0.05 で温度場をプロットした。時間積分のステップ幅は $\Delta_t = 10^{-4}$。 (b) 中点 $x = 0.5$ での温度の時間変化のようすをしめす。上は時間積分の刻み幅が $\Delta_t = 1.26 \times 10^{-3}$ の場合, 下は $\Delta_t = 1.25 \times 10^{-3}$ の場合。Δ_t が限界値 (約 1.258×10^{-3}) を超えると, 数値解が振動的に発散していくことがわかる。

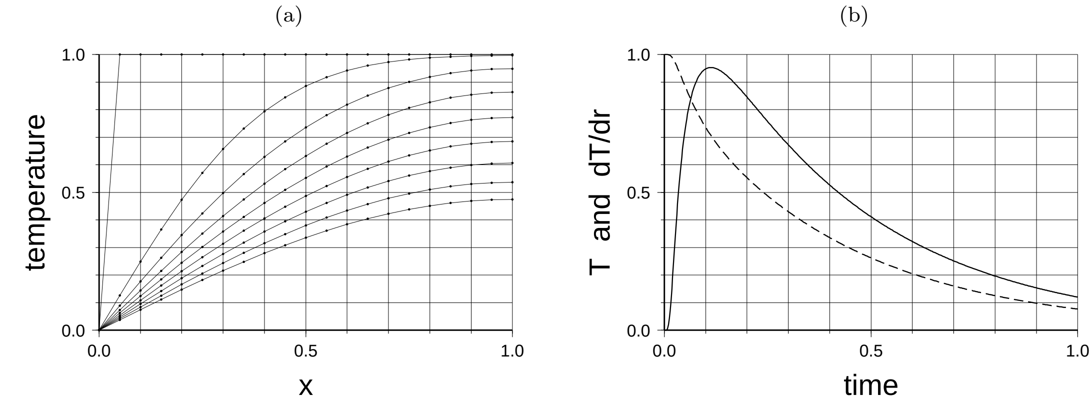

図 2: 「断熱壁」の結果 (ただし $h = 1/N = 1/20$, $\Delta_t = 10^{-4}$)。 (a) 時刻 $t = 0$ から 0.4 まで, 時間間隔 0.05 で温度場をプロットした。 (b) 中点 $x = 0.5$ での温度勾配 (実線) および右端 $x = 1$ での温度 (破線) をそれぞれ時間の関数としてプロットした。

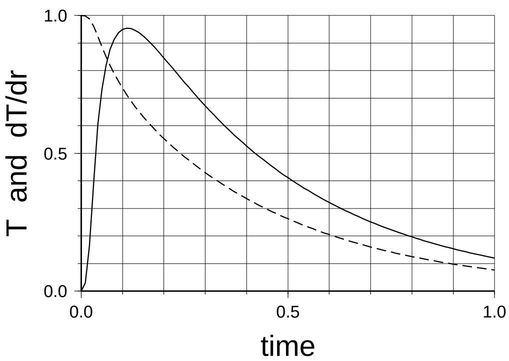

図 3: 「断熱壁」の問題をクランク・ニコルソン法で計算した結果 (ただし $h = 1/N = 1/20$, $\Delta_t = 10^{-2}$)。図 2 (b) と同様, 中点 $x = 0.5$ での温度勾配 (実線) および右端 $x = 1$ での温度 (破線) をそれぞれ時間の関数としてプロットした。

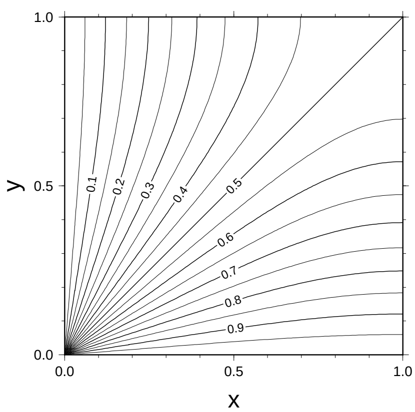

図 4: 問題 B の解答 (ただしオイラー法をもちいて, $h = 1/50$, $\Delta_t = 2 \times 10^{-5}$ で解いた)。時刻 $t = 5$ での温度分布を, 温度刻み 0.05 の等温線でしめす。